III Krive linije na površi

11 Prva fundamentalna forma površi i Gausove fundamentalne veličine prvog reda.

Neka je površ data jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Tada je prva osnovna forma F_1 površi (ili prva fundamentalna forma površi, ili prva diferencijalna forma površi) određena sa

$$F_1 = \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r}) = (\mathrm{d}\vec{r})^2,$$

gdje je

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\,'_u \mathrm{d}u + \vec{r}\,'_v \mathrm{d}v.$$

Može se pisati da je

$$F_1 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$
$$E = (\vec{r}\,'_u)^2, \quad F = (\vec{r}\,'_u \cdot \vec{r}\,'_v), \quad G = (\vec{r}\,'_v \cdot \vec{r}\,'_v).$$

Veličine E, F i G ovako definirane zovemo Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama prvog reda ili koeficijentima prve diferencijalne forme.

Jedinični vektor normale površi je određen sa

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

1. Zadana je sfera svojom parametrizacijom

$$\vec{r} = (r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u), \quad u \in [0,\pi], \quad v \in [-\pi,\pi].$$

Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.

2. Naći prvu diferencijalnu formu ravnine u odnosu na parametrizaciju

$$x = x_0 + \ell_1 u + \ell_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u + m_2 v$$
$$z = z_0 + n_1 u + n_2 v.$$

3. Naći prvu diferencijalnu formu rotacione plohe

$$x = f(u)\cos v, \; y = f(u)\sin v, \; z = g(u)$$

gdje je os rotacije os $0z$.

4. Naći prvu diferencijalnu formu površi zadane eksplicitnom jednačinom

$$z = z(x,y).$$

Primjetimo da ako je površ data jednačinom $\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$ Gaussove osnovne veličinama prvog reda se mogu računati na sljedeći način

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

(#) Zadana je sfera svojom parametrizacijom

$$\vec{r} = (r\sin u\cos v,\ r\sin u\sin v,\ r\cos u),\quad u\in[0,\pi],\ v\in[-\pi,\pi].$$

Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.

Rj. Pronađimo prvo Gausove fundamentalne veličine prvog reda, E, F i G. ($E=\dot{\vec{r}}_u^{\,2}$, $F=\dot{\vec{r}}_u\cdot\dot{\vec{r}}_v$, $G=\dot{\vec{r}}_v^{\,2}$).

$$\dot{\vec{r}}_u = (r\cos u\cos v,\ r\cos u\sin v,\ -r\sin u)$$

$$\dot{\vec{r}}_v = (-r\sin u\sin v,\ r\sin u\cos v,\ 0)$$

$$E=\dot{\vec{r}}_u^{\,2} = (r\cos u\cos v)^2+(r\cos u\sin v)^2+(-r\sin u)^2$$

$$= r^2(\underline{\cos^2 u}\cos^2 v+\underline{\cos^2 u}\sin^2 v+\sin^2 u)=$$

$$= r^2(\cos^2 u+\sin^2 u)=r^2$$

$$F=\dot{\vec{r}}_u\cdot\dot{\vec{r}}_v = -r^2\sin u\cos u\sin v\cos v+r^2\sin u\cos u\sin v\cos v+0=0$$

$$G=\dot{\vec{r}}_v^{\,2} = \underline{r^2\sin^2 u}\sin^2 v+\underline{r^2\sin^2 u}\cos^2 v = r^2\sin^2 u$$

Prva fundamentalna forma plohe $I = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ sada glasi

$$I = r^2du^2+r^2\sin^2 u\,dv^2.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ako promjenjive } u \text{ i } v \text{ zamjenimo sa } \phi \text{ i } \theta \text{ imamo}\\ \vec{r}=(r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)\\ I = r^2d\phi^2+r^2\sin^2\phi\,d\theta^2\end{array}}$$

#) Naći prvu diferencijalnu formu ravnine u odnosu na parametrizaciju

$$x = x_0 + l_1 u + l_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u + m_2 v$$
$$z = z_0 + n_1 u + n_2 v \,.$$

R: Odredimo prvo Gaussove fundamentalne veličine prvog reda:

$$E = \dot{\vec{r}}_u^{\,2}, \quad \dot{\vec{r}}_u = (l_1, m_1, n_1)$$
$$E = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2$$
$$F = \dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v, \quad \dot{\vec{r}}_v = (l_2, m_2, n_2), \qquad F = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$
$$G = \dot{\vec{r}}_v^{\,2} = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2$$

Prva fundamentalna forma je oblika

$$I = (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\,du^2 + (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)\,du\,dv + (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)\,dv^2$$

Ako su parametarske u i v crte zadane jediničnim vektorima, tada je

$$I = du^2 + 2\cos\omega\, du\,dv + dv^2$$

gdje je ω ugao između pravaca u i v.
Ako su još pravci u i v međusobno okomiti, tada je prva diferencijalna forma

$$I = du^2 + dv^2 \quad \text{ili} \quad I = dx^2 + dy^2$$

Ako je još xOy ravan parametarizirana polarnim koordinatama

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = 0 \qquad \text{tada} \qquad dx = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} dx^2 = \cos^2\varphi\, d\rho^2 - 2\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2 \\ dy^2 = \sin^2\varphi\, d\rho^2 + 2\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2 \end{array}\right\} \Rightarrow I = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

Prisjetimo se

$$f = \eta(u,v)$$

$$df = \frac{\partial \eta}{\partial u}du + \frac{\partial \eta}{\partial v}dv$$

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}du + \frac{\partial \eta}{\partial v}dv\right)$$

$$df^2 = df \cdot df$$

Naći prvu diferencijalnu formu rotacione plohe

$$x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\sin v,\quad z=g(u)$$

gdje je os rotacije os Oz.

Rj: Odredimo prvo Gausove fundamentalne veličine prvog reda

$$\vec{r}_u=(f'\cos v,\ f'\sin v,\ g')$$

$$\vec{r}_v=(-f(u)\sin v,\ f\cos v,\ 0)$$

$$E=\vec{r}_u^{\,2}=f'^2\cos^2 v+f'^2\sin^2 v+g'^2=f'^2+g'^2$$

$$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=-ff'\sin v\cos v+ff'\sin v\cos v+0=0$$

$$G=\vec{r}_v^{\,2}=f^2\sin^2 v+f^2\cos^2 v+0=f^2$$

Prva diferentijalna forma je

$$ds^2=(f'^2+g'^2)\,du^2+f^2\,dv^2$$

Napomenimo da koordinatne krive u i v ove rotacione plohe čine ortogonalnu mrežu jer je $F=0$

(#) Naći prvu diferencijalnu formu plohe zadane eksplicitnom jednačinom $z = z(x, y)$.

Rj. Posmatrajmo proizvoljnu tačku $M(x_1, y_1, z_1)$ ove plohe. Za proizvoljne vrijednosti x_1 i y_1 dobijemo tačku $z_1 = z(x_1, y_1)$. Prema tome, vektorska jednačina plohe bi glasila:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}.$$

Izračunajmo Gaussove fundamentalne veličine prvog reda

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right)^2 = 1^2 + 0^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right)^2 = 0^2 + 1^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Ako uvedemo oznake $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ imamo:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

Prva diferencijalna forma plohe glasi

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

odnosno

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2.$$